بهینه سازی پورتفولیو با رویکرد متغیرهای تصادفی فازی

*دکتر عادل آذر**
استاد مدیریت، عضو هیات علمی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

فرزاد ستاری اردبیلی
دانشجوی دکتری رشته تحقیق در عملیات، دانشگاه تربیت مدرس

دکتر علی اصغر انواری رستمی
عضو هیات علمی مرکز مطالعات مدیریت و بهره وری ایران، دانشگاه تربیت مدرس

دکتر پرویز احمدی
عضو هیات علمی گروه مدیریت، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

یکی از زمینه هایی که تحقیقات بسیاری در حوزه آن صورت گرفته است مسایل مالی و بخصوص پورتفولیو می باشد. هدف این تحقیق بهینه سازی انتخاب پورتفولیو بگونه ای است که نه تنها با شرایط محیطی انطباق بیشتری داشته باشد، بلکه به نتایج بهتری نسبت به متدهای قبل دست یابد. در این تحقیق مساله انتخاب پورتفولیو با بازگشت سرمایه ای که بصورت متغیرهای تصادفی فازی می باشد بررسی می گردد. چون حل چنین مدلهایی با روشهای سنتی میسر نمی باشد، لذا یک الگوریتم هیبریدی برای حل مساله ارائه شده است. برای اجرای روش هیبریدی ابتدا با استفاده از شبکه های عصبی فازی جواب موجه اولیه بدست آمده و سپس با رویکرد الگوریتم ژنتیک جواب بهینه محاسبه گردید.

کلید واژه:

انتخاب پورتفولیو - برنامه ریزی فازی- برنامه ریزی غیر خطی عدد صحیح – الگوریتم هیبریدی

مقدمه

بسیاری مقاله معروف مارکویتز (1952) را آغاز ورود جدی ریاضیات به حوزه مالی و کمی شدن مباحثی همچون ریسک و بازده دانسته و آنرا شروع تحلیل مدرن پورتفولیو بر می شمارند (گوپتا و همکاران، 2008). پیش از مقاله مارکویتز تصمیم گیری در مورد اوراق بهادر، کاملا مستقل صورت گرفته و اصولا رابطه بین این اوراق مدنظر نبود. تئوری مارکویتز در حقیقت ورود مسئله هم افزایی (که ارزش یک کل بیش از مجموع ارزش های اجزای تشکیل دهنده آن است) به حوزه اوراق بهادار بود.

مطالعه مارکویتز نقش مرکزی بسیاری از تحقیقاتی بوده است که سعی در بسط تئوری مدرن پورتفولیو داشته اند (کمبل و همکاران، 1997؛ التون و گرابر، 1995؛ جوریون، 1992 ؛ و کارسون و فولر، 2001) هر چند از سویی دیگر نیز محققان بسیاری کوشیده اند تا مدل مارکویتز را توسعه دهند. مانند مدل بهای دارایی سرمایه ای[1] (CAPM) (لینتنر، 1965؛ موسین، 1966؛ و شارپ، 1964) مدل نیمه واریانس (باوا و لیندنبرگ، 1977) (التون و گابر، 1995) و غیره.

اما با توجه به اینکه در مطالعات اولیه نرخ بازده آتی بصورت متغیرهای تصادفی و بازده مورد انتظار و واریانس ها بصورت ثابت در نظر گرفته می شد و سرمایه گذاران اطلاعات ناکافی از محیط دریافت می کردند لذا بحث عوامل ابهام بوجود آمد. از اینرو امروزه بسیاری از محققان تلاش می کنند تا روشهای ریاضی متفاوتی را برای توسعه روشهای انتخاب پورتفولیو ایجاد نمایند هاسویکه و همکاران (2009). در این میان توزیعهای احتمال و تئوری فازی، بحث ابهام و عدم اطمینان را با رویکردهای جدیدی مواجه ساخته اند. برخی محققان از

توزیعهای احتمال برای مدلسازی عدم اطمینان در بازده ها استفاده کردند در حالیکه سایرین از مدلهای فازی برای برخورد با بحث امکان، بهره جسته اند. برای مثال واتادا[2] (1997) اهداف مبهم برای بازده مورد انتظار و ریسک را با مساله انتخاب پورتفولیو فازی انجام داده است. تاناکا و ژو (1999) و تاناکا و همکارانش (2000) از تئوری احتمال برای حل عدم اطمینان و مدل بهینه سازی انتخاب پورتفولیو استفاده کرده اند.

در رویکرد مدلسازی ریاضی پورتفولیو، برخی مطالعات مبتنی بر رویکرد برنامه ریزی پویای احتمالی (آونی، 2005) برخی دیگر مانند تحقیق کومار و همکارانش (1978) و لی و چسر[3] (1980) با رویکرد برنامه ریزی آرمانی، عبدالعزیز و همکاران (1999 و 2001)؛ و زیمبا و مالوی[4] (1998) با استفاده از رویکرد تابع هدف خطی چند معیاره بوده اند. در میان مطالعات مبتنی بر منطق فازی (اینویگوچی و رامیک،2000؛ لئون و همکاران، 2002؛ تاناکا و همکاران، 2000؛ و ورچر و همکاران، 2007)، تحقیق کاتاگاری و همکاران[5] (2004) یکی از مطالعات مهم مبتنی بر متغیر تصادفی فازی بوده است. مطالعات مبتنی بر متغیرهای تصادفی فازی با ابهام درک یک متغیر تصادفی مربوط می شوند که در آنها اعداد فازی ارزش مرکزی متغیر تصادفی را شکل می دهند. در کنار چنین مطالعاتی یازنین[6] (2007) برخی مدلهای انتخاب پورتفولیو را مطرح کرد که در محیط احتمال- امکان قرار داشتند و عواید داراییهای مالی بصورت متغیرهای تصادفی فازی بودند. وانگ و همکارانش (2005) و ژانگ و وانگ[7] (2005) مسایل انتخاب پورتفولیو با حالت امکان وزنی طرح نموده اند. لاکانینا و پکورلا[8] (2006) یک مدل برنامه ریزی فازی با محدودیتهای تصادفی چند سطحی ارائه کرده اند تا هم عدم اطمینان و هم نادرستی را جوابگو بوده و در عین حال مساله انتخاب پورتفولیو را حل کند. هوانگ[9] (2006) در یکی از مقالات خود دو مدل انتخاب پورتفولیو بر مبنای معیار شانس نشات گرفته از معیار اعتبار ارائه کرده و در مقاله دیگری (هوانگ، 2007a) انتخاب پورتفولیو را بر اساس دو مدل پیشنهاد داده است که در آن بازده های مطمئن بصورت متغیرهای تصادفی مبتنی بر داده های فازی می باشند. عمار (2007) مدل بهینه سازی پورتفولیو را بصورت یک مساله برنامه ریزی محدب درجه دو حل کرده و جواب قابل قبولی بدست آورده است. ژانگ[10] و همکارانش (2007) نیز دو نوع مدلسازی پورتفولیو را بر اساس واریانسها و میانگینهای تصادفی حدود بالا و پایین تعریف نموده اند. اینویگوچی و رامیک[11] (2000)، لئون و همکاران[12] (2002)، تاناکا و ژو[13] (1999)، و تاناکا و همکاران (2000) و واتادا (1997) نیز در تحقیقاتشان، عوامل ابهام را بصورت مجموعه های فازی در نظر گرفته اند.

اما مشکل دیگری که در مواجه با شرایط توامان مدلسازی فازی و تصادفی رخ می دهد، امکان حل چنین مسایلی است که با رویکردهای سنتی قابل حصول نمی باشد. لیکن در دهه اخیر، بسط و گسترش برنامه های کامپیوتری، راهگشای توسعه روش ها و الگوریتمهای ابتکاری گردید که سالها امکان استفاده از انها میسر نبوده است. در این میان روشها و الگوریتمهای جدید هیوریستیک و متاهیوریستیک روند رو به رشدی را در بحث انتخاب پورتفولیو نشان داده اند. ویژگی مشترک تمامی روشهای بهینه سازی هیوریستیک این است که از یک جواب اولیه اختیاری شروع می شود و سپس با تولید جوابهای تکراری جدید بر اساس قواعد خاص و ارزیابی آنها در نهایت بهترین جواب ممکن در طی این جستجو را بدست می دهد (مارینجر، 2005).

1. بیان مساله

مسایل مالی در سالهای اخیر، موضوع تحقیقات بسیاری بوده است. انتخاب پورتفولیو یک فعالیت حیاتی در همه سازمانهاست که به فرایندهای پیچیده در حالتهای مختلف و گاه متضاد تصمیم گیری مربوط می شود (لین و هسی، 2004).

بحث انتخاب یک پورتفولیو، بحث شکل گیری یک پورتفولیو راضی کننده است که البته به خاطر وجود عدم اطمینان در بازگشت سرمایه، با دشواریهایی مواجه می باشد. در مدلهای انتخاب پورتفولیو، تصمیم گیرنده باید همه اطلاعات مرتبط در دسترس یا مورد نیاز را با توجه به مساله یا مفروضاتی، تطبیق نماید (گوپتا و همکاران، 2008). هر چند داشتن همه اطلاعات مرتبط با یک تصمیم، به این معنی نیست که تصمیم گیرندگان اطلاعات کاملی دارند، چرا که، در اکثر موارد، اطلاعات ناقص می باشد. علاوه بر این به علت نبود دانش کافی تصمیم گیرندگان، در خصوص مساله مورد نظر معمولا نمی توان احتمال معقولی برای پیامدهای جایگزین معین نمود و لذا از سوی دیگر شرایط تصمیم گیری در حالت عدم اطمینان بوجود می آید.

تا کنون مطالعات بسیاری در زمینه انتخاب پورتفولیو صورت گرفته است که اکثریت آنها بر مبنای رویکرد مارکویتز[14] و مدل ریاضی پیشنهادی وی که مبتنی بر میانگین- واریانس بود می باشند (مارکویتز، 1952). این مدل با حفظ مرکزیت خویش مبنایی برای مدلهای جدید پورتفولیو نیز بوده است (ارگوت و همکاران، 2004؛ کمبل و همکاران، 1997؛ التون و گرابر، 1995؛ و جوریون، 1992). البته محققان مدلهای دیگری را نیز برای مساله انتخاب پورتفولیو ارائه کرده اند که برخی از آنها عبارتند از: مدل بهای دارایی سرمایه ای CAPM (لونبرگر، 1997 و لیتنر، 1965) مدل نیمه واریانس (موسین، 1966)، و غیره.

لیکن مشخص است که همه اطلاعات مربوط به تصمیم سرمایه گذاری نمی تواند تنها بر حسب بازگشت سرمایه و ریسک باشد. بلکه با بررسی معیارهای بیشتری با توجه به این دو عامل می تواند منجر به عملکرد بهتر شود. لذا مدلهایی که معیارهای بیشتری را نسبت به مدل مارکویتز در نظر می گیرند حایز اهمیت گردیده اند. با توجه به عدم کفایت مدلهای ریاضی hard یا crisp در پوشش حالتهای عدم اطمینان، پیچیدگی و ابهام[15] یا مفاهیم و متغیرهای نا دقیق[16] استفاده از اصول و متدهای فازی ضرورت می یابد (التون و گابر، 1995). بخصوص رشد فزاینده در منابع ابهام و عدم اطمینان و رویکردهای مختلف برای کنترل آنها، لزوم ارائه مدلهای بهینه سازی جدیدی را نشان می دهد. معمولا اطلاعاتی تصمیم گیرندگان کسب می نمایند، با توضیحاتی زبانی همچون ریسک بالا، سود پایین یا نرخ بهره بالا بیان می شود (شین، 2005) که با ارائه تئوری فازی توسط زاده (زاده، 1978) مشخص گردید که می توان دانش ناقص در مورد بازگشت دارایی و عدم اطمینان در رفتار بازارهای مالی را با میانگین های مقادیر فازی و یا محدودیتهای فازی تا حدودی رفع نمود.

از سویی دیگر، معمولا، تبادلی بین هزینه سرمایه گذاری و پتانسیل مالی در انتخاب پورتفولیو وجود دارد. هر چه ارزش یک پورتفولیو کمتر باشد، معمولا معمولا بازگشت مالی آن نیز کمتر است. برای یک تصمیم گیر پیدا کردن نقطه بهینه

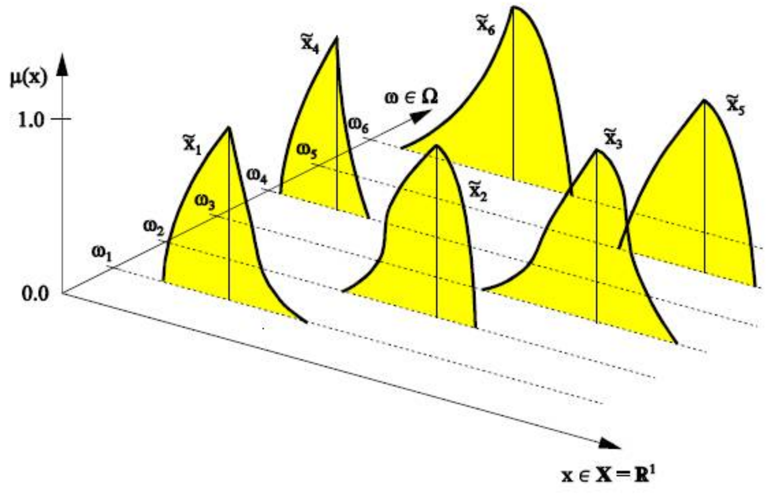
دشوار بوده و معمولا به علت تعدد گزینه ها زمان بر می باشد. چنین تصمیم گیری چون مربوط به انتخاب یا عدم انتخاب می باشد غالبا به شکل توابع صفر- یک فرمول بندی می شوند (لین و هسی، 2004). استفاده از برنامه ریزی عدد صحیحی در کاهش اولویت ریسک (گلیکمن، 2008) و یا استفاده از برنامه ریزی خطی با ابعاد نامحدود (کارسون و فولر، 2001) در سالهای اخیر صورت گرفته است اما هیچکدام از این تحقیقات به بررسی توامان توابع هدف عدد صحیح غیرخطی و با محدودیتهای بازگشت سرمایه فازی نپرداخته اند.

با این حال در مدلهای مبتنی بر روش های برنامه ریزی خطی و یا ترکیب آن با برنامه ریزی عدد صحیح نتایج جالب توجهی بدست آمده است اما در مواقعی که تابع هدف بصورت غیرخطی باشد، می توان ترکیب بهتری با استفاده از برنامه ریزی غیرخطی عدد صحیحی و برنامه ریزی فازی بدست آورد.

علاوه بر این با توجه به اینکه مسایل انتخاب پوتفوی در حالت فازی بودن متغیرهای تصادفی بازگشت سرمایه بصورت برنامه ریزی غیرخطی فرمول بندی می شوند لذا بحث توامان این دو حالت بصورت یک مدل جامع می تواند منجر به نتایج بهتری خصوصا در تقابل با مدلهای اولیه ریسک و افزایش بازگشت سرمایه شود.

2. متغیرهای تصادفی فازی

متغیرهای تصادفی فازی نخستین بار توسط (کویکراک[17]، 1978 و 1979) ارائه گردید. اساس بحث این است که یک متغیر تصادفی فازی یک تابع قابل اندازه گیری از یک فضای احتمال به یک دسته از مجموعه های فازی می باشد. متغیرهای تصادفی فازی بیانگر پدیده فازی تصادفی هستند که در واقع بازده های آتی با مقادیر فازی می باشند. به بیان دیگر، هر متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ حداقل شامل یک متغیر تصادفی X به عنوان منشا $\tilde{X}$ می باشد. لذا متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ پیامد فازی طرح نامطمئن $\Omega \tilde{\to} F(R^n)$ می باشد که $F(R^n)$ مجموعه تمام اعداد فازی در R^n می باشد. شکل 1 متغیر تصادفی فازی یک بعدی را نشان می دهد.



شکل (1)- ماهیت متغیر تصادفی فازی یک بعدی

تحقیقات بسیاری در زمینه کاربردهای برنامه ریزی تصادفی فازی صورت گرفته است. پس از کاواکرناک این مفهوم توسط محققانی همچون پوری و رالسکو[18] (1986)، کروز و میر[19] (1987)، لیو و لیو (2003a) توسعه یافت. لیو و لیو (2003 b) طیف های مختلفی از مدل امید ریاضی (EVM) متغیر تصادفی فازی ارائه کرده و به دلیل الزام قابلیت سنجش و جهت رتبه بندی متغیرهای تصادفی فازی، عملگر امید ریاضی عددی را معرفی نمودند. در سال 2001 نیز مفهوم ارزشهای خوش بینانه و بدبینانه توسط لیو ارائه گرید. قابلیت متغیرهای تصادفی فازی زمانی بیشتر آشکار می شود که توزیع های احتمال مشخص شوند. توزیع یک متغیر تصادفی $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ با μ فازی و σ^2 قطعی در نظر گرفته می شود. بعنوان مثال اگر $\xi \sim N(\tilde{\mu},\sigma^2)$ بدانیم و $\tilde{\mu}$ متغیر فازی مثلثی $\tilde{\mu}=(a,b,c)$ باشد، آنگاه ξ یک متغیر تصادفی فازی با مقادیر دارای توزیع نرمال می باشد (لیو، 2002).

تعریف 1- یک متغیر تصادفی فازی، یک تابع ξ از فضای احتمال $(\Omega,\mathrm{A},\Pr)$ به یک مجموعه از متغیرهای فازی است بطوریکه $Cr\{\xi(\omega\in B\}$ یک تابع قابل اندازه گیری w به ازای هر مجموعه بورل B از $\Re$ می باشد. به عنوان مثال اگر $(\Omega,\mathrm{A},\Pr)$ یک فضای احتمال باشد و اگر $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_m\}$ و $u_1,u_2,...,u_m$ متغیرهای فازی باشند، آنگاه تابع

$$\xi(w)=\begin{cases} u_1, & if \quad \omega=\omega_1 \\ u_2, & if \quad \omega=\omega_2 \\ ..... & \\ u_m, & if \quad \omega=\omega_m \end{cases} \tag{1}$$

یک تابع متغیر تصادفی فازی خواهد بود (لیو و لیو، 2003 b)

بعنوان مثال اگر η یک متغیر تصادفی در فضای احتمال $(\Omega,\mathrm{A},\Pr)$ باشد و $\tilde{a}$ یک متغیر فازی باشد، آنگاه مجموع $\xi=\eta+\tilde{a}$ یک متغیر تصادفی فازی است.

$$\xi(\omega)=\eta(\omega)+\tilde{a}, \qquad \forall\omega\in\Omega \tag{2}$$

تعریف 2- فرض کنید ξ یک متغیر فازی با تابع عضویت μ باشد. به ازای هر A مجموعه از اعداد حقیقی ، اعتبار[20] بصورت زیر تعریف می شود:

$$Cr\{\xi\in A\}=\frac{1}{2}(\sup_{x\in A}\mu(x)+1-\sup_{x\in A^c}\mu(x)) \tag{3}$$

تعریف 3- اگر ξ یک متغیر تصادفی باشد که در فضای اعتبار $(\Theta, P(\Theta), Cr)$، تعریف شده است، آنگاه امید ریاضی $E(\xi)$ بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} Cr\{\theta \in \Theta | E[\xi(\theta)] \geq t\} dt - \int_{-\infty}^{0} Cr\{\theta \in \Theta | E[\xi(\theta)] \leq t\} dt \quad (4)$$

که حداقل یکی از دو انتگرال، متناهی می‌باشند.

3. مدل پورتفولیو با رویکرد متغیرهای تصادفی

در این بخش مساله پورتفولیو بصورت یک مساله بهینه‌سازی با اهداف فازی فرمول‌بندی می‌شود. مدل خطی عدد صحیح فازی یک پورتفولیو در حالت کلی می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} &Maximize && z = \sum_{i \in N} \tilde{\bar{r}}_i x_i \\ &Minimise && Var(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\bar{r}}_i x_i) \\ &S.t: && \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} a_{ij} x_{ij} \leq b \end{aligned} \quad (5)$$

که $a_{ij}, b \in R$ ضرایب حقیقی و $\tilde{\bar{r}}_{ij}$ نیز متوسط نرخ بازده آتی سهام i و بصورت متغیر تصادفی فازی می باشد، یعنی، $\tilde{\bar{r}}_{ij} \in F(R)$. σ_{ij} نیز کواریانس مشترک می باشد که با هدف کاهش ریسک در مدلهای پورتفولیو، در نظر گرفته می شود.

روشهای مختلفی برای ترکیب اهداف دوگانه تاکنون مطرح گشته‌اند. تابع هدف مدل فوق را می‌توان در قالب ترکیبی از کاهش ریسک و افزایش متوسط بازده بازنویسی نمود. برای این کار فرض کنید $\lambda \in [0,1]$ پارامتر اجتناب از ریسک باشد. آنگاه می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&Minimise \quad \lambda\left[Var(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{r}}_i x_i)\right]+(1-\lambda)\left[-\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tilde{r}}_i x_i\right]\\&S.t: \quad \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}a_{ij}x_{ij}\le b\\&\qquad x_i=\text{integer},\quad i=1,2,\dots,n\end{aligned} \tag{6}$$

$\lambda=0$ بیانگر حالت حداکثر سازی بازده و نقطه بهینه با بیشترین میانگین بازده می‌باشد. هـر مقـداری بـین (0و1) بیـانگر تبادل بین میانگین بازده و واریانس می‌باشد که جوابی بین دو انتهای مساله به ازای $\lambda=0$ و $\lambda=1$ خواهد داشت.

و در صورتی که مقادیر متغیرها بصورت عدد صحیح باشند داریم:

$$\begin{aligned}&Minimise \quad \lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\sigma_{ij}x_j\right]+(1-\lambda)\left[-\sum_{i=1}^{n}\mu_{ri}x_i\right]\\&S.t: \quad \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}a_{ij}x_{ij}\le b\\&\qquad \sum_{i=1}^{n}x_i=k\\&\qquad ly_i\le x_i\le uy_i\\&\qquad y_i\in\{0,1\}\end{aligned} \tag{7}$$

k نشانگر محدودیت تعداد سهام می باشد. l و u نیز حدود بالا و پایین مد نظر سـرمایه گـذار در خریـد سـهام نـوع i می باشد.

تابع غیر خطی فوق در حالت جایگزینی میانگین توزیع، می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$Max\sum_{i=1}^{n}E(\tilde{r}_i X_i) \tag{8}$$

چون r بصورت تصادفی با توزیع نرمال می باشد، می توان به جای آن از امید ریاضی توزیع بـازده هـا، اسـتفاده کـرد. لذا به تبع آن می توان هدف کاهش ریسک را در قالب یک محدودیت دیگر و بدین ترتیب نوشت:

$$Ch\{\sum\tilde{r}_i x_i\le b_i\}(\gamma)\ge 1-\alpha_i \tag{9}$$

که b_i بیانگر حداقل میزان بازده اولیه مد نظر سرمایه گذار از سهام i ، و α_i نشانگر سطح اطمینان دلخواه سرمایه گذار در مورد سهام i می باشد. γ نیز بیانگر بازده بدبینانه می باشد.

با توجه به اینکه شانس رخداد یک متغیر تصادفی بصورتی تابعی از (۰،۱] به [۰،۱] بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ch\{f(\xi) \geq 0\}(\gamma) = \sup_{Cr\{A\} \geq \gamma} \inf_{\theta \in A} \Pr\{f(\xi(\theta)) \geq 0\} \tag{10}$$

لذا می‌توان نوشت:

$$Ch\{f(\xi) \geq r\}(\gamma) = \Pr\{f(\xi(\theta)) \geq r\} \tag{11}$$

که حاصل آن بر اساس مقادیر مختلف r قابل محاسبه می‌باشد.

پس:

$$Ch\{\sum \tilde{r}_i x_i \leq b_i\} \geq 1-\alpha_i = \Pr\{b_i - (\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i x_i) \geq r_0\} \leq \alpha_0 \tag{12}$$

بعد دوم مدل پورتفولیو، کاهش ریسک می باشد که با حداقل سازی واریانس صورت می گیرد. در این مطالعه با توجه به اینکه بازده های آتی بصورت متغیرهای تصادفی فازی LR می باشند، لذا کواریانس این متغیرها برابر است با (نادر، 1997) و (کورنر[21]، 1997):

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= Cov[m_x, m_y] + a_{l_2}[Cov(l_X, l_Y) + Cov(r_X, r_Y)] \\ &\quad - 2a_{l_1}[Cov(m_x, r_Y - l_Y + Cov(m_Y, r_X - l_X) \end{aligned} \tag{13}$$

که با فرض متقارن بودن متغیرهای تصادفی LR داریم:

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= Cov[m_x, m_y] + a_{l_2}[Cov(l_X, l_Y) + Cov(r_X, r_Y)] \\ &\quad - 2a_{l_1}[Cov(m_x, l_Y) + Cov(m_Y, l_X) \end{aligned} \tag{14}$$

و با توجه به فرض استقلال m, r, l می توان نوشت:

$$Var(X) = Var(m) + \frac{1}{6}Var(l) + \frac{1}{6}Var(r) \quad (15)$$

و

$$Cov(X,Y) = Cov(m_X, m_Y) + \frac{1}{3}Cov(l_X, l_Y) \quad (16)$$

و چون هر دو بازه سمت چپ و راست در حالت نرمال بودن متغیرهای تصادفی برابرند، می توان نوشت (سمیمایو و همکاران[22]، 2008):

$$Var[\tilde{r}] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X_i X_j [Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) + \frac{1}{3}Cov(\tilde{l}_i, \tilde{l}_j)] \quad (17)$$

که $\tilde{r}_i$ و $\tilde{r}_j$ بازده های متغیرهای j, i و $\tilde{l}_i$ و $\tilde{l}_j$ بیانگر بازه های آنها می باشند.

مساله فوق از نوع مسایلی است که با روشهای سنتی قابل حل نمی باشد. این مساله از نوع مسایل هیبریدی است که هم با متغیرهای زبانی و هم متغیرهای احتمالی مواجهند. برای حل این نوع مدل روشهای اندکی مطرح شده اند. یکی از این روشها تقریب خطی (لای و هووانگ[23]، 1992) و دیگری روش غیرخطی است. بهینه سازی غیر خطی از رویکرد هیبریدی استفاده می کند که در آن خروجی های شبکه عصبی کروموزومهای ورودی الگوریتم خواهند بود. (هوانگ[24]، 2007 b)

مدل نهایی مساله می تواند به شکل مجموعه 18 نوشته شود:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad f \\
&st: \\
&\Pr\{\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i x_i \ge f\} \ge \beta_0 \\
&\Pr\{b_i - (\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i x_i) \ge r_0\} \ge \alpha_0 \\
&\sum_{i=1}^{n} P_i x_i \le I \\
&\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i x_i \ge \tilde{R}_{\exp_i} \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = k \\
&ly_i \le x_i \le uy_i \\
&y_i \in \{0,1\} \\
&x_i; \text{integer} \quad i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
\tag{18}
$$

که P_i میانگین بهای سهم i و I میزان سرمایه در دسترس می باشد. k بیانگر حداکثر تنوع مورد نظر سرمایه گذار و u,l به ترتیب حداقل و حداکثر تعداد سهم i در پورتفولیو می باشد.

4. مطالعه موردی

به منظور تست مدل، سهام 20 شرکت در گروههای متفاوت کسب و کار، در بورس اوراق بهادار تهران انتخاب گردید. جدول یک اطلاعات مربوط به سهام های مزبور را نشان می دهد. به جهت عدم امکان ذکر نام تجاری، از نماد متغیر x_i برای آنها استفاده گردید.

در این تحقیق، به جهت سهولت محاسباتی، از اعداد فازی مثلثی استفاده شد. محاسبه مقادیر سمت راست و چپ و بردار نرخ بازده مورد انتظار، و ماتریس کواریانس، از داده‌های تاریخی حاصل آمده است. برای بدست آوردن این داده‌ها، ابتدا داده‌های تاریخی مربوط به 12 ماهه گذشته در سال 88-89 جمع آوری گردیده و برای برآورد نرخ بازده و ماتریس کواریانس استفاده شد. سپس از خبرگان و فعالان این بخش خواسته شد تا برآورد خویش را از میزان α_i و β_i بیان کنند. میانگین این برآوردها در هر سهام، بعنوان حدود چپ و راست در نظر گرفته شد. میزان بازده مورد انتظار هر کدام از سهام ها و حدود چپ و راست نیز در جدول 1 ارائه شده است. در جدول 1، نرخ بازده (متغیر تصادفی فازی) سهام i عبارتست از: $E(r_i) = (E(m_i) - \alpha_i, E(m_i), E(m_i) + \beta_i)$.

جدول(1) - بازده آتی و مورد انتظار سهام

سهام	میانگین بازده و حدود چپ و راست	نرخ بازده آتی مورد انتظار	سهام	میانگین بازده و حدود چپ و راست	نرخ بازده آتی مورد انتظار
x_1	U(0,36 , 0,8 , 0,24)	(۰,۲۳،۱,۰۳،۰,۳۲)	x_{11}	U(0,1, 0,81, 0,65)	(0,24, 1,5, 0,26)
x_2	U(0,39 , 1,1 , 0,52)	(0,14, 0,71, 0,39)	x_{12}	U(0,34, 1,27, 0,65)	(0,32, 1,11, 0,2)
x_3	U(0,15 , 1,3 , 0,15)	(0,44, 2,01, 0,15)	x_{13}	U(0,16, 0,7 , 0,65)	(0,29, 1,22, 0,44)
x_4	U(0,24, 1,8 , 0,18)	(0,39, 2,09, 0,11)	x_{14}	U(0,29, 0,93, 0,42)	(0,74, 1,61, 0,19)
x_5	U(0,14, 1,5 , 0,32)	(0,27, 1,33, .12)	x_{15}	U(0,1, 0,76, 1)	(0.33, 1,45, 0,66)
x_6	U(0,6, 1,6 , 0,94)	(0,4, 0,84, 0,36)	x_{16}	U(0,4, 1,65, 0,58)	(0,12, 1,08, 0,3)
x_7	U(0,1 , 0,61 , 0,4)	(0,19, 1,19, 0,61)	x_{17}	U(0.09, 0,88, 0,25)	(0,22, 1,5, 0,62)
x_8	U(0,32, 1,6, 0..52)	(0,15, 1,33, 0,21)	x_{18}	U(0,44, 1,07, 0,5)	(0,4, 1,61, 0,33)
x_9	U(0,12 , 0,9 , 0,4)	(0,36, 1,96, 0,34)	x_{19}	U(0,1, 1,7, 0,16)	(0,24, 1,61, 0,26)
x_{10}	U(0,4 , 1 , 0,21)	(0,17, 1,73, 0,42)	x_{20}	U(0,2, 0,99, 0,8)	(0,09, 0,7, 1)

حداکثر تنوع سهام مد نظر سرمایه گذار مجموعا 6 نوع سهم و بودجه اولیه سرمایه گذاری چهارصد میلیون تومان بوده است. نرخ بازده مورد انتظار سرمایه گذار ($R_{\exp}$) 0/80 با حدود بالا و پایین 0/3 و 0/15 در نظر بدست آمد.

5. الگوریتم هیبریدی

با توجه به اینکه حل مدل پیشنهادی با رویکردهای سنتی ممکن نیست (چاو و دنینگ، 1994) لذا از روش هیبریدی در این تحقیق استفاده گردید. برای این کار می توان از تکنیک شبیه سازی و الگوریتم ژنتیک (هالند، 1975) بر اساس شبیه سازی فازی تصادفی برای یافتن جواب بهیه ایتفاده کرد. زمانی که شبیه سازی فازی تصادفی در قالب الگوریتم ژنتیک اجرا گردد، زمان نسبتا طولانی برای یافتن جواب بهینه صرف خواهد شد. لذا برای کاهش حجم محاسباتی، از شبکه های عصبی، استفاده گردید. شبکه های عصبی در تقریب هر نوع تابع پیوسته غیرخطی در یک فضای محدود مشهور می باشند (هوانگ، 2007 b).

برای مدلسازی شبکه های عصبی، از یک لایه در ورودی، یک لایه مخفی با 20 نرون و دو لایه بعنوان خروجی، استفاده گردید. همچنین، یک مجموعه داده برای تعیین تابع هدف نامعین با روش آموزش الگوریتم پس انتشار خطا بکار گرفته شد. علاوه بر این، نوع تابع در لایه مخفی از نوع سیگموویید لجستیک بوده است.

برای اجرای الگوریتم ژنتیک (GA)، تعداد 30 کروموزوم با رویکرد تصادفی جهت تولید کروموزومهای موجه در نظر گرفته شد . مقادیر ارزش مورد انتظار و شانس ها، بر اساس آنها محاسبه گردید. احتمال جهش و تقاطع به ترتیب برابر $p_m = 0.3$ و $p_c = 0.5$ بوده اند. الگوریتم هیبریدی استفاده شده به ترتیب زیر می باشند:

گام1: ایجاد داده های ورودی و خروجی برای توابع نامعین مجموعه 20 با استفاده از شبیه سازی تصادفی:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \max\{\bar{f} \mid \Pr\{\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i x_i \geq \bar{f}\} \geq \beta_0\} \\
U_2 &= \Pr\{b_i - (\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i x_i) \geq r_0\} \\
U_3 &= E[f(x), \xi]
\end{aligned} \tag{20}$$

گام 2: آموزش شبکه های عصبی برای تقریب توابع نامعین بر اساس داده های ورودی-خروجی

گام 3: ایجاد جامعه کروموزومها که موجه بودن انها بتواند با شبکه عصبی آموزش دیده بررسی شود

گام 4: بروزرسانی کروموزومها با عملگرهای تقاطع و جهش

گام 5: محاسبه مقادیر هدف برای همه کروموزومها با شبکه عصبی آموزش دیده

گام 6: محاسبه تناسب هر کروموزوم بر اساس مقادیر هدف

گام 7: انتخاب کروموزومها با چرخش رولت و با توجه به مقادیر تناسب متفاوت

گام 8: تکرار گامهای 4 تا 7 به تعداد معین

گام 9: تعیین بهترین کروموزومها به عنوان جواب بهیه مساله انتخاب پورتفولیو

با اجرای الگوریتم هیبریدی (2000 بار گردش در شبیه سازی تصادفی فازی، 500 داده آموزش در شبکه های عصبی و 500 تولید نسل در GA) جواب بهینه مطابق جدول 2 و با مقدار $\bar{f} = 1.43701$ به عنوان بهترین مقدار هدف حاصل شده، بدست آمد.

جدول (2)- نتایج تابع هدف در حالتهای مختلف

Population size	P_m	Crossover function	f
20	0,2	0,5	1,0994131
20	0,2	0,8	1,183819
20	0,3	0,5	1,2550317
20	0,3	0,8	1,400388
30	0,2	0,5	1,33944
30	0,2	0,8	1,401543
30	0,3	0,5	1,443701
30	0,3	0,8	1,42452

نتیجه گیری

در این تحقیق مساله انتخاب پورتفولیو در حالتی در نظر گرفته شد که بازده هر سهام بصورت متغیر تصادفی فازی باشد. با توجه به اینکه در محیط واقعی امکان تعیین دقیق بازده های آتی با ابهام و پیچیدگی همراه است، و حل چنین مسایلی نیز با رویکردها و مدلهای سنتی میسر نمی باشد، لذا از رویکرد هیبریدی برای بهینه سازی همزمان فازی بودن و تصادفی بودن استفاده گردید. مقادیر مورد انتظار و نیز محدودیتهای تصادفی ابتدا با شبکه عصبی حل شد سپس جواب اولیه موجه بدست آمده در قالب الگوریتم ژنتیک هیبریدی بکار گرفته شد. برای بررسی قابلیت مدل در عالم واقع، بیست سهم از سهام بورس اوراق بهادار تهران در گروههای جداگانه ای به تصادف انتخاب و سپس مدل بر روی آنها اجرا گردید. اجرای مدل، قابلیت بالای آنرا در بهینه سازی پورتفولیو نشان داد.

نویسندگان برای مطالعات بعدی، پیشنهاد می نمایند که بررسی چنین مدلهایی در حالتهایی که هر کدام از متغیرها از توزیعهای متفاوتی برخوردار باشند، می تواند مثمر ثمرتر باشد.

منابع

- Abdelaziz, F.B., Lang, P., Nadeau, R. (۱۹۹۹). Efficiency in multiple criteria under uncertainty, Theory and Decision ٤۷, ۱۹۱–۲۱۱.
- Abdelaziz, F.B., Mejri, S. (۲۰۰۱). Application of goal programming in a multi-objective reservoir operation model in Tunisia, European Journal of Operational Research ۱۳۳, ۳٥۲–۳٦۱.
- Ammar, E. E. (۲۰۰۷). On solutions of fuzzy random multiobjective quadratic programming with applications in portfolio problem, Information Sciences, Available Online ٤ April.

- Aouni, B., Ben Abdelaziz, F., Martel, J. M. (۲۰۰٥). Decision-maker's preferences modeling in the stochastic goal programming, European Journal of Operational Research ۱٦۲, ٦۱۰–٦۱۸.
- Bawa, V.S., Lindenberg, E.B. (۱۹۷۷). Capital market equilibrium in a mean-lower partial moment framework, Journal of Financial Economics ٥, ۱۸۹–۲۰۰.
- Campbell, J.Y., Lo, A.W., Mac Kinlay, A.C. (۱۹۹۷). The Econometrics of Finance Markets, Princeton University Press, Princeton, NJ.

- Carlsson, C., Fullér, R. (۲۰۰۱). On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems ۱۲۲, ۳۱٥–۳۲٦.
- Chow. K., Denning. K. C., (۱۹۹٤). On variance and lower partial moment betas: the equivalence of systematic risk measures, Journal of Business Finance and Accounting ۲۱, ۲۳۱–۲٤۱.
- Ehrgott, M., Klamroth, K., Schwehm, C. (۲۰۰٤). An MCDM approach to portfolio optimization, European Journal of Operational Research. ۱٥٥, ۷٥۲–۷۷۰.

- Elton, E.J., Gruber, M.J. (۱۹۹٥). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Wiley, New York.
- Glickman.T. S. (۲۰۰۸). Program portfolio selection for reducing prioritized securities, European Journal of Operational Research ۱۹۰, ۲٦۸–۲۷٦.
- Gupta, P; Mehlawat, M. K; Saxena, A. (۲۰۰۸). Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming. Information Sciences ۱۷۸, ۱۷۳٤-۱۷٥٥.

- Hasuike, T., Katagiri, H., Ishii, H. (۲۰۰۹). Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns. Fuzzy Sets and Systems. ARTICLE IN PRESS.

- Holland, J. Adaptation in Natural and Artificial Systems, University of Michigan Press, Ann Arbor, ۱۹۷٥.

- Huang, X. (۲۰۰٦). Fuzzy chance-constrained portfolio selection, Applied Mathematics and Computation ۱۷۷, ٥۰۰–٥۰۷.
- Huang, X. (۲۰۰۷, a). Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information, European Journal of Operational Research ۱۸۰, ۳۹٦–٤۰٥.
- Huang, X. (۲۰۰۷, b). A new perspective for optimal portfolio selection with random fuzzy returns, Journal of Information Sciences ۱۷۷, ٥٤۰٤–٥٤۱٤.
- Inuiguchi, M., Ramik, J. (۲۰۰۰). Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem, Fuzzy Sets and Systems ۱۱۱, ۳–۲۸.

- Jorion, P. (۱۹۹۲). Portfolio optimization in practice, Financial Analysis Journal January–February ٦٨–٧٤.

- Katagiri, H., Ishii, H., Sakawa, M. (۲۰۰٤). On fuzzy random linear knapsack problems, Central European Journal of Operations Research ۱۲, ٥٩–٧٠.

- Korner, R. (۱۹۹۷). On the variance of fuzzy random variables. Fuzzy Sets and Systems, ۹۲, ۸۳–۹۳.

- Kruse R, and Meyer KD, Statistics with Vague Data, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, ۱۹۸۷.

- Kumar, P.C., Philippatos, G. C., Ezzell, J.R. (۱۹۷۸). Goal programming and the selection o portfolios by dual-purpose funds, The Journal of Finance ۳۳, ۳۰۳–۳۱۰.

- Kwakernaak, H. K. (۱۹۷۸). Fuzzy random variables-I, Information Sciences ۱٥, ۱–۲۹

- Kwakernaak, H.K. (۱۹۷۹). Fuzzy random variables-II, Information Sciences ۱۷, ۱٥۳–۱۷۸

- Lacagnina, V., Pecorella, A. (۲۰۰٦). A stochastic soft constraints fuzzy model for a portfolio selection problem, Fuzzy Sets and Systems ۱٥۷, ۱۳۱۷ – ۱۳۲۷.

- Lai, Y.J., Hwang, Ch. L. (۱۹۹۲). Fuzzy mathematical programming. Methods and applications. Springer-Verlag. Berlin, pp ۲٥۷-۲۷۰.

- Lee, S.M., Chesser, D. L. (۱۹۸۰). Goal programming for portfolio selection, The Journal of Portfolio Management ۲۲–۲٦.

- Leon, R.T., Liern, V., Vercher, E. (۲۰۰۲). Validity of infeasible portfolio selection problems: fuzzy approach, European Journal of Operational Researches ۱۳۹, ۱۷۸–۱۸۹.

- Lin, Ch., Hsieh, P. J, (۲۰۰٤). A fuzzy decision support system for strategic portfolio management, Decision Support Systems, ۳۸, ۳۸۳-۳۹۸

- Lintner, B. J. (۱۹٦٥). Valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, Review of Economics and Statistics ٤۷, ۱۳–۳۷.

- Liu, B. (۲۰۰۱). Fuzzy random chance-constrained programming, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. ۹, No. ٥, ۷۱۳-۷۲۰.

- Liu, B. (۲۰۰۲). Theory and Practice of Uncertain Programming, Physica-Verlag, Heidelberg.

- Liu, Y.K, and Liu, B. (۲۰۰۳, a). A class of fuzzy random optimization: Expected value models, Information Sciences, Vol.۱٥٥, Nos.۱-۲, ۸۹-۱۰۲.

- Liu, Y. K, and Liu, B. (۲۰۰۳, b). Fuzzy random variables: A scalar expected value opera-tor, Fuzzy Optimization and Decision Making, Vol.۲, No.۲, ۱٤۳-۱٦۰.

- Luenberger, D.G. (۱۹۹۷). Investment Science, Oxford University Press, Oxford.

- Maringer, D. (۲۰۰۵). Portfolio Management with Heuristic Optimization. Advances in Computational Management Science. Springer.
- Markowitz, H. (۱۹۵۲). Portfolio selection, Journal of Finance ۷, ۷۷–۹۱.

- Mossin, J. (۱۹٦٦). Equilibrium in capital asset markets, Econometrica ۳٤ (٤), ۷٦۸–۷۸۳.
- Nather, W. (۱۹۹۷). Linear statistical inference for random fuzzy data. Statistics, ۲۹, ۲۲۱–۲٤۰.

- Puri ML, and Ralescu D, Fuzzy random variables, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.۱۱٤, ٤۰۹-٤۲۲, ۱۹۸٦.

- Sharpe, W.F. (۱۹٦٤). Capital asset prices: a theory of market equivalent under conditions of risk, Journal of Finance ۱۹ (۳), ٤۲٥–٤٤۲.

- Sheen, J.N. (۲۰۰٥). Fuzzy financial profitability analyses of demand side management alternatives from participant perspective, Information Sciences ۱٦۹, ۳۲۹–۳٦٤.

- Smimou, K., Bector, C. R., & Jacoby, G. (۲۰۰۸). Portfolio selection subject to experts' judgments International Review of Financial Analysis, ۱۷, ۱۰۳٦–۱۰٥٤.
-
- Tanaka, H., Guo, P. (۱۹۹۹). Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions, European Journal of Operational Research ۱۱٤, ۱۱٥–۱۲٦.
- Tanaka, H., Guo, P., Turksen, I.B. (۲۰۰۰). Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems ۱۱۱, ۳۸۷–۳۹۷.
- Vercher, E., Bermúdez, J.D., Segura, J.V. (۲۰۰۷). Fuzzy portfolio optimization under downside risk measures, Fuzzy Sets and Systems ۱٥۸, ۷٦۹–۷۸۲.
- Wang, X., Xu, W.J., Zhang, W.G., Hu, M.L. (۲۰۰٥). Weighted possibilistic variance of fuzzy number and its application in portfolio theory, Lecture Notes in Artificial Intelligance ۳٦۱۳ (۲۰۰٥) ۱٤۸–۱٥٥.
- Watada, J. (۱۹۹۷). Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making, Tatra Mountains Mathematical Publications ۱۳, ۲۱۹–۲٤۸.
- Yazenin, A.V. (۲۰۰۷). Possibilistic-probabilistic models and methods of portfolio optimization, in: Studies in Computational Intelligence, Vol. ۳٦, Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, pp. ۲٤۱–۲٥۹.
- Zadeh, L.A. (۱۹۷۸). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems ۱, ۳–۲۸.

- Zhang, W.G., Wang, Y.L. (۲۰۰٥). Portfolio selection: possibilistic mean–variance model and possibilistic efficient frontier, Lecture Notes in Computer Science ۳٥۲۱, ۲۰۳–۲۱۳.
- Zhang, W. G., Wang, Y. L., Chen, Z. P., Nie, Z. K. (۲۰۰۷). Possibilistic mean–variance models and efficient frontiers for portfolio selection problem, Information Sciences ۱۷۷, ۲۷۸۷–۲۸۰۱.

- Ziemba, W.T., Mulvey, J. M. (۱۹۹۸). Worldwide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, Cambridge.

پی نوشت ها

[۱] Capital asset pricing model

[۲] Watada

[۳] S.M. Lee; D.L. Chesser (۲۰۰۲)

[٤] W.T.Ziemba; J.M. Mulvey (۱۹۹۸)

[٥] H.Katagiri; H.Ishii; M.Sakawa (۲۰۰٤)

[٦] A.V.Yazenin (۲۰۰۷)

[۷] Zhang and Wang

[۸] Lacagnina and Pecorella

[۹] huang

[۱۰] Zhang

[۱۱] M.Inuiguchi , J.Ramik

[۱۲] R.T.Leon, V.Liern, E.Vercher

[۱۳] H.Tanaka,P.Guo

[۱٤] Markowitz

[۱٥] vague

[۱٦] imprecise

[۱۷] Kwakernaak

[۱۸] Puri and Ralescu

[۱۹] Kruse and Meyer

[۲۰] credibility

[۲۱] Korner

[۲۲] Smimou, et al

[۲۳] Lai, Hwang

[۲٤] Huang